15

द्रवगतिकी

[HYDRODYNAMICS]

पाठ्यक्रम— धारारेखीय एवं विक्षुब्ध प्रवाह, श्यानता एवं श्यानता गुणांक, रेनॉल्ड संख्या, सांतत्य समीकरण, बरनौली का प्रमेय व उसके अनुप्रयोग, स्टोक का नियम (द्रव में गोले का गिरना), सीमान्त वेग।

स्मरणीय बिन्दु

1. वेग प्रवणता $= \frac{dv}{dx}$
2. श्यान बल $F = -\eta A \frac{dv}{dx}$
3. रेनॉल्ड संख्या $K = \frac{V_c \rho D}{\eta}$
4. स्टोक नियमानुसार $F = 6\pi\eta av$
5. अन्तिम वेग का सीमान्त वेग $v = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2(d-\sigma)g}{\eta}$
6. अविरतता के सिद्धान्त से, $Av =$ नियतांक
7. बरनौली प्रमेय से,

   (i) $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh =$ नियतांक

   (ii) $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh =$ नियतांक

   (iii) $\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h =$ नियतांक
8. यदि नली क्षैतिज हो, तो $P + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ नियतांक

   या $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

   या $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$
9. टोरिसिली प्रमेय से, $v = \sqrt{2gh}$.
10. वेन्चुरीमीटर $Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}}$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

(A) बहुविकल्पीय प्रश्न—

1. ताप बढ़ने पर द्रव की श्यानता—

(a) बढ़ जाती है (b) शून्य हो जाती है (c) कम हो जाती है (d) कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

2. बरनौली का प्रमेय आधारित है—

(a) संवेग संरक्षण पर (b) दाब संरक्षण पर (c) ऊर्जा संरक्षण पर (d) द्रव्यमान संरक्षण पर।

3. द्रवों का वह गुण जिसके कारण द्रव विभिन्न परतों के बीच होने वाली आपेक्षिक गति का विरोध करता है, कहलाता है—

(a) श्यानता (b) प्रत्यास्थता (c) पृष्ठ तनाव (d) बल।

4. एक मकान की छत से तूफानी हवा बह रही है, इस तूफानी हवा के कारण छत पर बल लगेगा—

(a) नीचे की ओर (b) क्षैतिज दिशा में (c) शून्य (d) ऊपर की ओर।

5. असमान परिच्छेद की क्षैतिज नली से जल प्रवाहित हो रहा है। नली के संकीर्णतम भाग में जल का—

(a) वेग अधिकतम व दाब न्यूनतम होगा (b) दाब अधिकतम व वेग न्यूनतम होगा (c) दाब व वेग दोनों अधिकतम होंगे (d) दाब व वेग दोनों न्यूनतम होंगे।

6. एक अच्छे स्नेहक के लिये होना चाहिये—

(a) उच्च श्यानता (b) कम श्यानता (c) मध्यवर्ती श्यानता (d) उच्च घनत्व।

7. श्यान द्रव में सीमान्त वेग से गिरने वाले पिंडों का त्वरण होता है—

(a) शून्य (b) g (c) g से कम (d) g से अधिक।

8. रेनाल्ड संख्या का विमीय सूत्र है—

(a) $[ML^{-1}T^{-1}]$ (b) $[M^0L^0T^0]$ (c) $[M^0LT^0]$ (d) $[M^0L^0T]$.

9. क्रांतिक वेग का सूत्र है—

(a) $v_c = \frac{k\eta d}{r}$ (b) $v_c = \frac{k\eta}{dr}$ (c) $v_c = \frac{dr}{k\eta}$ (d) $v_c = \frac{r\eta}{dk}$.

10. वेन्चुरीमीटर में अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल बढ़ा देने से द्रव प्रवाह की दर—

(अ) बढ़ती है (ब) घटती है (स) अपरिवर्तित रहती है (द) शून्य हो जाती है।

11. वर्षा की बूँदें सीमान्त वेग से गिरती हैं, इसका कारण है—

(अ) वायु का उत्प्लावन बल (ब) वायु का पृष्ठ-तनाव (स) वायु की श्यानता (द) गुरुत्वाकर्षण बल।

12. जब कोई द्रव किसी नली में धारारेखी प्रवाह में बहता है, तो उसकी विविध पर्तों में लग रहे श्यानता बल का कारण है—

(अ) एक पर्त से दूसरी पर्त में ऊर्जा का स्थानान्तरण

(ब) एक पर्त से दूसरी पर्त में संवेग का स्थानान्तरण

(स) अणुओं की एकसमान चाल

(द) नली के अनुदिश परिवर्तनशील घनत्व।

13. निम्नलिखित में से कौन-सा द्रव अधिक श्यान है—

(अ) शहद (ब) जल (स) वायु (द) रक्त।

उत्तर— 1. (c), 2. (c), 3. (a), 4. (d), 5. (a), 6. (a), 7. (a), 8. (b), 9. (b), 10. (c). 11. (c), 12. (b), 13. (a).

(B) सही जोड़ियाँ बनाइए—

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. वायुयान के पंखों की बनावट	(a) सीमांत वेग कम करता है
2. स्टोक का नियम	(b) टौरीसेली प्रमेय
3. द्रव का बहि:स्राव वेग	(c) वेन्चुरीमापी
4. बरनौली प्रमेय	(d) श्यान बल $= 6\pi nav$
5. पैराशूट	(e) बरनौली प्रमेय पर आधारित होता है।

उत्तर— 1. (e), 2. (d), 3. (b), 4. (c), 5. (a).

II.

खण्ड 'अ'	खण्ड 'ब'
1. श्यान बल F	(a) $P+\frac{1}{2}dv^2+dgh=$ नियतांक
2. स्टोक का नियम	(b) $Av=$ नियतांक
3. सीमान्त वेग (v)	(c) $-\eta A\frac{dv}{dx}$
4. अविरतता सिद्धान्त (d)	(d) $\frac{2}{9}\frac{a^2(d-\sigma)g}{\eta}$
5. बरनौली प्रमेय	(e) $F=6\pi\eta av.$

उत्तर— 1. (c), 2. (e), 3. (d), 4. (b), 5. (a).

(C) सत्य/असत्य बताइए—

1. बरनौली प्रमेय असंपीड्य तथा अश्यान तरलों पर लागू होती है।
2. पैराशूट की सहायता से कूदने वाले व्यक्ति का वेग प्रारम्भ में बढ़ता है तथा फिर नियत हो जाता है।
3. मशीनों के कलपुर्जे सर्दियों में जाम हो जाते हैं क्योंकि मशीनों के कलपुर्जों में प्रयुक्त स्नेहक की श्यानता कम ताप पर बढ़ती है।
4. किसी बर्तन में भरे द्रव के स्वतंत्र तल से h गहराई पर बने छिद्र से निकलने वाले द्रव का बहि:स्राव वेग, $\sqrt{2gh}$ होता है।
5. वेन्चुरीमीटर बरनौली प्रमेय पर आधारित एक उपकरण है।
6. बरनौली प्रमेय संवेग संरक्षण के नियम पर आधारित है।
7. यदि किसी द्रव का वेग क्रांतिक वेग से कम है, तो उसका प्रवाह विक्षुब्ध प्रवाह होता है।
8. अविरतता के सिद्धान्त के अनुसार नली के प्रत्येक स्थान पर अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल और द्रव के प्रवाह वेग का गुणनफल सदैव नियत रहता है।
9. किसी श्यान द्रव में सीमांत वेग से गिरने वाले पिण्ड का त्वरण g से कम होता है।

उत्तर— 1. सत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. सत्य, 6. असत्य, 7. असत्य, 8. सत्य, 9. सत्य।

(D) रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये—

1. किसी तरल के प्रवाह का वह अधिकतम वेग जहाँ तक उसका प्रवाह धारारेखीय रहता है, ... कहलाता है।
2. ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता ..... हो जाती है जबकि गैसों की श्यानता ..... जाती है।
3. बहते हुए द्रव में ..... प्रकार की ऊर्जाएँ होती है।
4. जब रेनाल्ड संख्या का मान 0 से 2000 के बीच रहता है, तो द्रव का प्रवाह .....प्रवाह होता है।
5. बहते हुये द्रव की ऊर्जाओं का योग सदैव नियत रहता है, इसे ..... प्रमेय कहते हैं।
6. गैसों की श्यानता का कारण एक पर्त का दूसरी पर्त में ..... है।
7. प्वाइज ..... का C.G.S. मात्रक है।
8. ..... प्रमेय के अनुसार किसी छिद्र से द्रव का बहि:स्राव वेग उस वेग के तुल्य है जिसे कोई वस्तु द्रव के मुक्त पृष्ठ से उस छिद्र तक स्वतन्त्रतापूर्वक गिरते हुए प्राप्त कर लेती है।
9. जब श्यान द्रव का वेग कम रहता है तब उसके प्रवाह को ..... कहते हैं।
10. इकाई दूरी पर स्थित द्रव की दो पर्तों के बीच वेग परिवर्तन को..... कहते हैं।
11. ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता ..... जाती है और गैसों की श्यानता.....जाती है।
12. धारा रेखीय प्रवाह में रेनाल्ड संख्या ..... से कम तथा विक्षुब्ध प्रवाह में ..... से अधिक होता है।
13. दाब शीर्ष, वेग शीर्ष तथा गुरुत्व शीर्ष का S.I. पद्धति में मात्रक ..... होता है।
14. रेनॉल्ड संख्या K का मान .....से अधिक होने पर द्रव का प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है।
15. बहते हुए द्रव के प्रति एकांक की गतिज ऊर्जा ..... होती है।
16. बरनौली प्रमेय ..... के नियम पर आधारित है।
17. स्टोक के नियमानुसार श्यान बल F = ... होता है।
18. किसी टंकी में बने छिद्र में से कोई द्रव जिस वेग से बाहर निकलता है, उसे ..... वेग कहते हैं।
19. ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता .....है।

उत्तर— 1. क्रांतिक वेग, 2. कम, बढ़, 3. तीन, 4. स्तरीय, 5. बरनौली, 6. विसरण, 7. श्यानता गुणांक, 8. टोरीसेली, 9. स्तरीय, 10. वेग प्रवणता, 11. घट, बढ़, 12. 2000, 3000, 13. मीटर, 14. 3000, 15. $\frac{1}{2}$ घनत्व × वेग^2, 16. ऊर्जा संरक्षण, 17. $6\pi\eta rv$, 18. बहि:स्राव, 19. घटती।

(E) एक शब्द/एक वाक्य में उत्तर दीजिए—

1. श्यान बल क्या है ?
2. ठोस, द्रव और गैस में से किसमें श्यानता का गुण नहीं होता है ?
3. श्यानता गुणांक का S. I. मात्रक क्या है ?
4. ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता पर क्या प्रभाव पड़ता है ?
5. आदर्श तरल किसे कहते हैं ?
6. बहते हुए द्रव में कितने प्रकार की ऊर्जाएँ होती हैं ?
7. बरनौली प्रमेय किस नियम पर आधारित है ?
8. वेन्चुरीमीटर किस सिद्धान्त पर कार्य करता है ?
9. तरलों की श्यानता उनके किस गुण के कारण होती है ?
10. गर्म द्रव, ठण्डे द्रव की तुलना में तेज बहता हैं, क्यों ?

उत्तर— 1. द्रव की विभिन्न परतों के बीच आपेक्षिक गति का विरोध करने वाला बल श्यान बल कहलाता है, 2. ठोस में, 3. डेकाप्वाइज, 4. कम हो जाती है, 5. जो असंपीड्य और अश्यान होता है, 6. तीन, 7. ऊर्जा संरक्षण के नियम, 8. बरनौली प्रमेय, 9. ससंजक बल, 10. गर्म करने पर द्रव की श्यानता कम हो जाती है इसलिए गर्म द्रव, ठण्डे द्रव की तुलना में तेज बहता हैं।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. तरल का धारा रेखीय प्रवाह क्या है ?

उत्तर—जब कोई तरल इस प्रकार प्रवाहित होता है कि किसी निश्चित बिन्दु से गुजरने वाला प्रत्येक कण उसी मार्ग और उसी चाल से चलता है जिस पर आगे वाला कण चलकर आगे बढ़ गया है, तो तरल के प्रवाह को धारा रेखीय प्रवाह या अपरिवर्ती प्रवाह कहते हैं।

प्रश्न 2. क्रांतिक वेग किसे कहते हैं ?

उत्तर—किसी द्रव का वह अधिकतम प्रवाह वेग जहाँ तक द्रव का प्रवाह धारारेखीय होता है, क्रांतिक वेग कहलाता है इसे v_c से व्यक्त करते हैं।

प्रश्न 3. विक्षुब्ध प्रवाह का क्या तात्पर्य है ?

उत्तर—जब तरल की गति अनियमित तथा टेढ़ी-मेढ़ी होती है, तो तरल के प्रवाह को विक्षुब्ध प्रवाह कहते हैं।

उदाहरण—तेज बहने वाली नदियों के पानी का प्रवाह, आँधी-तूफान के समय हवा का प्रवाह आदि।

प्रश्न 4. क्या प्रवाहित द्रव में दो धारा रेखाएँ परस्पर काट सकती हैं ? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

अथवा

दो धारा रेखाएँ एक-दूसरे को नहीं काटतीं, क्यों ?

उत्तर—प्रवाहित द्रव में दो धारा रेखाएँ परस्पर नहीं काट सकतीं। धारा रेखा के किसी बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर द्रव के वेग को प्रदर्शित करती है। यदि दो धारा रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं, तो कटान बिन्दु पर द्रव के वेग की दो दिशाएँ होंगी, जो कि सम्भव नहीं हैं।

प्रश्न 5. श्यानता से आप क्या समझते हैं ?

उत्तर—तरल का वह गुण जिसके कारण प्रत्येक तरल अपनी विभिन्न पर्तों के बीच आपेक्षिक गति का विरोध करता है, श्यानता कहलाता है।

प्रश्न 6. ठोसों में श्यानता का गुण क्यों नहीं होती ?

उत्तर—ठोसों में श्यानता नहीं होती क्योंकि उसके विभिन्न पर्तों के बीच आपेक्षिक गति नहीं होती।

प्रश्न 7. किसी तरल की श्यानता किन-किन कारकों पर निर्भर करती है ?

उत्तर—किसी तरल की श्यानता निम्न कारकों पर निर्भर करता है—(i) तरल की प्रकृति पर, (ii) तरल दाब पर (iii) तरल के ताप पर।

प्रश्न 8. क्रान्तिक चाल क्या है ? रेनॉल्ड संख्या के साथ इसका क्या सम्बन्ध है ?

उत्तर—क्रान्तिक चाल—किसी तरल के प्रवाह की वह अधिकतम चाल जहाँ तक उसका प्रवाह धारारेखीय होता है, क्रान्तिक चाल कहलाती है।

यदि नली में बहते हुये द्रव की क्रान्तिक चाल v_c, द्रव का श्यानता गुणांक η, घनत्व ρ तथा नली के व्यास D हो तो

$$v_c = \frac{K\eta}{\rho D}$$, जहाँ K रेनॉल्ड संख्या है। **यही अभीष्ट सम्बन्ध है।**

प्रश्न 9. सातत्य समीकरण क्या है ? अथवा अविरतता का सिद्धान्त क्या है ?

उत्तर—किसी नली में किसी द्रव के धारारेखीय प्रवाह के लिये नली के प्रत्येक बिन्दु पर

$$Av = \text{नियतांक}$$

इस समीकरण को सातत्य समीकरण कहते हैं जहाँ A नली का अनुप्रस्थ काट तथा v द्रव का प्रवाह वेग है।

प्रश्न 10 बहते द्रव में कौन-कौन सी ऊर्जाएँ होती हैं ?

उत्तर—बहते हुए आदर्श द्रव की निम्न तीन ऊर्जाएँ होती हैं—(i) गतिज ऊर्जा, (ii) स्थितिज ऊर्जा, (iii) दाब ऊर्जा।

प्रश्न 11. बरनौली का प्रमेय लिखिये।

उत्तर—इस प्रमेय के अनुसार, जब कोई असंपीड्य तथा अश्यान द्रव किसी नली में धारारेखीय प्रवाह में बहता है तो इसके मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर इसके एकांक द्रव्यमान की कुल ऊर्जा नियत रहती है। अर्थात्—

गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा + दाब ऊर्जा = नियतांक

प्रश्न 12. गहरा जल शान्त क्यों बहता है ?

उत्तर—बरनौली के प्रमेय के अनुसार, दाब अधिक होने पर तरल कम वेग से बहता है। जल जितना अधिक गहरा होता है उसका स्थैतिक दाब उतना ही अधिक होता है। फलस्वरूप गहरा जल कम वेग से अर्थात् शान्त बहता है।

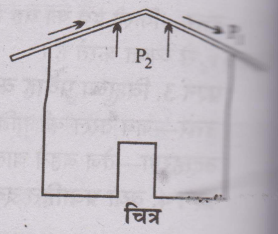
प्रश्न 13. आकाश में बादल तैरते हुये क्यों मालूम पड़ते हैं ?

उत्तर—बादल संघनित जलवाष्प के कणों से बना होता हैं। ये कण वायु की श्यानता के कारण बहुत धीरे-धीरे नीचे आ सकते हैं। यही कारण है कि वे आकाश में तैरते दिखाई देते हैं।

प्रश्न 14. तेज आँधी-तूफान आने से मकान की छतें उड़ जाती हैं, क्यों ?

चित्र

उत्तर—तेज आँधी-तूफान या चक्रवात के समय वायु छत के ऊपर अत्यधिक चाल से बहती है। अतः बरनौली के प्रमेय के अनुसार, छत के ऊपर दाब P_1 का मान कम हो जाता है जबकि छत के नीचे दाब P_2 वायुमण्डलीय दाब के बराबर होता है अतः दाबान्तर $P_2 - P_1$ के कारण छत पर नीचे से ऊपर की ओर एक बल कार्य करता है फलस्वरूप छत उड़ जाती है जबकि मकान के अन्य भागों को कोई क्षति नहीं पहुँचती।



प्रश्न 15. तेज रेलगाड़ी के प्लेटफार्म से गुजरने पर कूड़ा-करकट रेलगाड़ी की ओर आकर्षित होने लगता है, कारण समझाइए।

उत्तर—जब तेज रेलगाड़ी प्लेटफार्म से गुजरती है, तो बरनौली प्रमेय के अनुसार, वहाँ पर दाब एकाएक कम हो जाता है। फलस्वरूप कूड़ा-करकट रेलगाड़ी की ओर आकर्षित होने लगता है।

प्रश्न 16. बरनौली प्रमेय के विभिन्न अनुप्रयोग क्या हैं ?

उत्तर—बरनौली प्रमेय की सहायता से निम्न घटनाओं की व्याख्या आसानी से की जा सकती है—

(i) वेन्चुरीमापी के सिद्धान्त की व्याख्या।

(ii) टोरिसिली प्रमेय की उत्पत्ति।

(iii) तेज आँधी-तूफान आने से मकान के छत के उड़ जाने की व्याख्या।

(iv) कणित्र या स्प्रेयर के कार्य प्रणाली की व्याख्या।

(v) बुन्सन बर्नर के कार्य की व्याख्या।

(vi) वायुयान के पंखों की विशिष्ट आकृति होने की व्याख्या।

प्रश्न 17. स्टोक का नियम क्या है ?

उत्तर—स्टोक का नियम—स्टोक के नियमानुसार, जब कोई गोलाकार ठोस, जिसकी त्रिज्या r है, किसी श्यान द्रव में एक नियत वेग v से गिरता है, तो गति की दिशा के विपरीत गोले पर एक श्यान बल

$$F = 6\pi\eta rv$$ लगता है।

जहाँ η श्यानता गुणांक है।

प्रश्न 18. स्टोक नियम की चार शर्तें लिखिए।

उत्तर—(i) गोलाकार वस्तु का आकार अत्यन्त सूक्ष्म होना चाहिए।

(ii) गोलाकार वस्तु को दृढ़ तथा चिकना होना चाहिए।

(iii) वस्तु के वेग को द्रव के क्रांतिक वेग से कम होना चाहिए।

(iv) तरल को समांगी तथा श्यान होना होना चाहिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. द्रव के धारारेखीय प्रवाह और विक्षुब्ध प्रवाह में अन्तर लिखिए।

उत्तर— धारारेखीय प्रवाह और विक्षुब्ध प्रवाह में अन्तर

क्र.	धारारेखीय प्रवाह	विक्षुब्ध प्रवाह
1.	इस प्रवाह में किसी बिन्दु से गुजरने वाले प्रत्येक कण का वेग वही रहता है और प्रत्येक कण आगे वाले कण के मार्ग का अनुसरण करता है।	इस प्रवाह में किसी बिन्दु से गुजरने वाले कणों के वेग भिन्न-भिन्न हो सकते हैं।
2.	इसमें प्रवाह का वेग क्रान्तिक वेग से कम होता है।	इसमें प्रवाह का वेग क्रान्तिक वेग से अधिक होता है।
3.	कणों का मार्ग सरल रेखा अथवा वक्र हो सकता है।	कणों का मार्ग अनियमित एवं टेढ़ा-मेढ़ा होता है।

प्रश्न 2. श्यानता क्या है ? श्यानता सम्बन्धी न्यूटन का नियम लिखिए। इस नियम की सहायता से श्यानता गुणांक की परिभाषा लिखिए तथा मात्रक बताइए। इसका विमीय सूत्र भी लिखिए।

उत्तर—जब कोई तरल गति करता है, तो उसकी पास-पास की पर्तों के बीच आन्तरिक घर्षण बल कार्य करने लगता है जो पर्तों की आपेक्षिक गति का विरोध करता है। किसी तरल के इस गुण को उसकी श्यानता कहते हैं।

श्यानता सम्बन्धी न्यूटन के नियमानुसार—

द्रव की किन्हीं दो पर्तों के मध्य स्पर्शरेखीय श्यान बल F,

(i) पर्तों के क्षेत्रफल A के अनुक्रमानुपाती होता है।

(ii) पर्तों के मध्य वेग-प्रवणता $\frac{dv}{dx}$ के अनुक्रमानुपाती होता है।

इस प्रकार, $F \propto A$

तथा $F \propto \frac{dv}{dx}$

दोनों को मिलाकर लिखने पर, $F \propto A\frac{dv}{dx}$

या $$F = -\eta A \frac{dv}{dx}$$

जहाँ, η एक नियतांक है जिसे द्रव का श्यानता गुणांक कहते हैं। यह द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है। ऋण चिन्ह इस बात का द्योतक है कि श्यान बल द्रव के प्रवाह के विपरीत दिशा में कार्य करता है।

उपर्युक्त सूत्र में यदि $A = 1$ तथा $\frac{dv}{dx} = 1$ हो, तो

$$F = -\eta$$

अत: **किसी द्रव का श्यानता गुणांक द्रव के अन्दर उस स्पर्शरेखीय बल के बराबर होता है, जो इकाई क्षेत्रफल वाली उन पर्तों के मध्य कार्य करता है जिनके मध्य वेग प्रवणता इकाई हो।**

श्यानता गुणांक का S.I., मात्रक न्यूटन/मीटर × सेकण्ड है। इसका विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-1}]$ है।

प्रश्न 3. (a) श्यानता का कारण क्या है ?

उत्तर—हम जानते हैं कि जब कोई ठोस किसी दूसरे ठोस की सतह पर फिसलता है, तो उनके बीच घर्षण बल लगने लगता है जो उनकी आपेक्षिक गति का विरोध करता है।

यह घटना द्रव तथा गैसों के लिए भी सत्य है। जब किसी तरल की दो पर्तों के मध्य आपेक्षिक गति होती है, तो उनके मध्य एक आंतरिक घर्षण बल कार्य करने लगता है जो उनकी आपेक्षिक गति को समाप्त करने का प्रयास करता है। अत: तरल में श्यानता होती है।

(b) श्यानता का आण्विक सिद्धांत क्या है ?

उत्तर— द्रव में श्यानता उसके अणुओं के मध्य लगने वाले ससंजक बलों के कारण होती है। जब द्रव की विभिन्न पर्तों के बीच आपेक्षिक गति होती है, तो अणुओं के बीच की दूरी बढ़ जाती है। अत: ससंजक बल इसका विरोध करते हैं। श्यानता तरल पदार्थों का गुण होता है। गैसों में द्रवों की तुलना में श्यानता कम होती है।

प्रश्न 4. श्यानता क्या है ? किसी तरल की श्यानता किन-किन कारकों पर निर्भर करता है ?

उत्तर—किसी तरल का वह गुण जिसके कारण प्रत्येक तरल अपनी विभिन्न परतों के बीच आपेक्षिक गति का विरोध करता है, श्यानता कहलाता है। श्यानता के कारण तरल के सतत् पर्तों के मध्य लगने वाले आन्तरिक घर्षण बल को श्यान बल कहते हैं।

किसी तरल की श्यानता निम्न कारकों पर निर्भर करती है—

(i) तरल की प्रकृति पर—अलग-अलग तरल की श्यानता अलग-अलग होती है। गाढ़े तरल में पतले तरल की तुलना में श्यानता अधिक होती है।

(ii) दाब पर—दाब बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता बढ़ जाती है जबकि पानी की श्यानता कुछ 100 वायुमण्डलीय दाब पर घटती है। कम दाब पर गैसों की श्यानता दाब वृद्धि के साथ बढ़ती है, जबकि अधिक दाब पर अपरिवर्तित रहती है।

(iii) ताप पर—ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता कम होती है, जबकि गैसों की श्यानता बढ़ जाती है।

प्रश्न 5. वेग प्रवणता क्या है ? तरल के वेग प्रवणता का सूत्र स्थापित कीजिये।

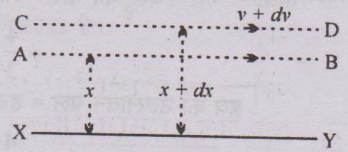
उत्तर—जब कोई तरल किसी स्थिर तल के ऊपर धारारेखीय प्रवाह में प्रवाहित होता है, तो तरल की जो पर्त स्थिर तल के सम्पर्क में होता है, उसमें उपस्थित तरल कणों का वेग न्यूनतम (शून्य) होता है। इस स्थिर तल के लम्बवत् ऊपर की ओर जाने पर विभिन्न पर्तों में तरल कणों का प्रवाह वेग क्रमश: बढ़ता जाता है। अत: **इकाई दूरी पर स्थित तरल की दो पर्तों के बीच वेग परिवर्तन को तरल की वेग प्रवणता कहते हैं।**

माना कि कोई तरल स्थिर क्षैतिज तल XY के ऊपर क्षैतिज दिशा में बाँये से दाँये प्रवाहित हो रहा है। चित्र के अनुसार इस स्थिर तल xy से दूरी पर स्थित तल AB का प्रवाह वेग v तथा $(x + dx)$ दूरी पर स्थित तल CD का प्रवाह वेग $(v + dv)$ है।

अत: तरल की

$$\text{वेग प्रवणता} = \frac{\text{दोनों पर्तों के बीच आपेक्षिक वेग}}{\text{दोनों पर्तों के बीच की दूरी}}$$

$$= \frac{(v+dv)-v}{(x+dx)-x} = \frac{dv}{dx}$$



चित्र—वेग

यही तरल के वेग प्रवणता का सूत्र है।

प्रश्न 6. रेनॉल्ड संख्या क्या है ? इसका महत्त्व बताइए।

उत्तर—किसी नली में बहते हुये द्रव के लिए क्रान्तिक वेग v_c का मान द्रव के श्यानता गुणांक η, घनत्व ρ तथा नली के व्यास D पर निम्नानुसार निर्भर करता है—

$$v_c = \frac{K\eta}{\rho D}$$

जहाँ, K एक विमाहीन संख्या है, जिसे रेनॉल्ड संख्या कहते हैं।

रेनॉल्ड संख्या का महत्त्व—(i) यदि K का मान 0 से 2000 तक है, तो श्यान द्रव का प्रवाह स्तरीय प्रवाह होता है। अत: स्तरीय प्रवाह के लिए अधिकतम औसत चाल

$$v = \frac{K\eta}{\rho D}$$

(ii) जब K का मान 2000 और 3000 के बीच होता है, तो द्रव का प्रवाह अस्थायी होता है और यह प्रवाह स्तरीय प्रवाह से विक्षुब्ध प्रवाह में बदल सकता है।

(iii) यदि K का मान 3000 से अधिक है, तो उसका प्रवाह निश्चित रूप से विक्षुब्ध प्रवाह होता है।

प्रश्न 7. स्टोक का नियम क्या है ? इसकी शर्तें लिखिए।

अथवा

स्टोक का नियम क्या है ?

उत्तर—स्टोक के नियमानुसार, जब कोई गोलाकार वस्तु अनन्त विस्तार वाले किसी समांगी तरल में गिरती है, तो वस्तु की गति के विपरीत लगने वाला श्यान बल $F = 6\pi\eta a v$.

जहाँ, η = द्रव का श्यानता गुणांक, a = गोले की त्रिज्या तथा v = वस्तु का वेग।

स्टोक के नियम की शर्तें—(i) गोलाकार वस्तु का आकार अत्यन्त सूक्ष्म होना चाहिए।

(ii) गोलाकार वस्तु को दृढ़ तथा चिकना होना चाहिए।

(iii) वस्तु के वेग को तरल के क्रान्तिक वेग से कम होना चाहिए।

(iv) तरल का विस्तार अनन्त होना चाहिए।

(v) तरल को समांगी तथा श्यान होना चाहिए।

प्रश्न 8. सीमान्त वेग किसे कहते हैं ? किसी श्यान द्रव में गिरने वाले गोले के सीमांत वेग की गणना कीजिए।

(M.P. 2009)

उत्तर—सीमान्त वेग—जब कोई वस्तु किसी श्यान द्रव में गिरती है, तो प्रारम्भ में उसका वेग बढ़ता जाता है, किन्तु कुछ समय के पश्चात् वह नियत वेग से गिरने लगती है। इस नियत वेग को ही वस्तु का सीमान्त वेग कहते हैं।

सीमान्त वेग के लिए व्यंजक—मान लो एक सूक्ष्म गोलाकार वस्तु जिसकी त्रिज्या a तथा जिसके पदार्थ का घनत्व σ है, श्यानता गुणांक η तथा घनत्व σ वाले द्रव में गुरुत्व के अधीन स्वतन्त्रतापूर्वक गिरती है। गिरती हुई वस्तु पर तीन बल कार्य करते हैं—

(i) वस्तु का भार जो ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है।

(ii) द्रव का उत्प्लावन बल जो ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्य करता है।

(iii) श्यान बल जो ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्य करता है।

अब वस्तु का भार = आयतन × घनत्व × g

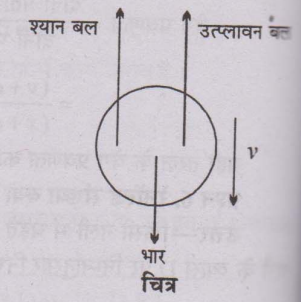
$$= \frac{4}{3}\pi a^3 . \rho g$$

द्रव का उत्प्लावन बल = हटाये गये द्रव का भार

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 . \sigma g$$

अत: वस्तु का परिणामी भार $= \frac{4}{3}\pi a^3 . \rho g - \frac{4}{3}\pi a^3 . \sigma g$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \sigma) g$$



चित्र

ऊपर की ओर कार्य करने वाला द्रव का श्यान बल $F = 6\pi\eta a v$

यदि वस्तु सीमांत वेग v से गिरती हो, तो

श्यान बल = वस्तु का परिणामी भार

या $$6\pi\eta a v = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \sigma) g$$

अत: $$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^2 (\rho - \sigma) g}{\eta}$$

प्रश्न 9. सीमांत वेग किसे कहते हैं ? यह किन-किन कारकों पर निर्भर करता है।

उत्तर—सीमांत वेग—उपर्युक्त प्रश्नानुसार।

सीमांत वेग निम्नलिखित कारकों पर निर्भर करता है—

(i) सीमांत वेग वस्तु की त्रिज्या के अनुक्रमानुपाती होता है।

(ii) यह वस्तु और द्रव के घनत्वों के अंतर के अनुक्रमानुपाती होता है।

(iii) यह गुरुत्वीय त्वरण के अनुक्रमानुपाती होता है।

(iv) यह द्रव के श्यानता गुणांक के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

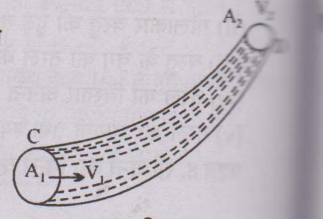
प्रश्न 10. द्रव के बहने का अविरतता का सिद्धान्त क्या है ? लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

उत्तर—यदि कोई आदर्श द्रव असमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नली में बह रहा है तथा उसका प्रवाह धारारेखीय है तो नली के प्रत्येक स्थान पर उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल और द्रव के प्रवाह के वेग का गुणनफल सदैव नियत रहता है। इसे अविरतता का सिद्धान्त कहते हैं।

यदि नली के किसी स्थान पर उसके अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A तथा द्रव के प्रवाह का वेग v हो, तो इस सिद्धान्त के अनुसार,

$$A . v = \text{एक नियतांक}$$

या $$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



चित्र

प्रमाण—मानलो कोई आदर्श द्रव एक असमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नली CD में बह रहा है।

C और D नली के दो अनुप्रस्थ परिच्छेद हैं जिनके क्षेत्रफल क्रमश: A_1 और A_2 हैं। इन परिच्छेदों से प्रवाहित द्रव के वेग क्रमश: v_1 तथा v_2 हैं। मानलो द्रव का घनत्व ρ है।

परिच्छेद C से बहने वाला द्रव 1 सेकण्ड में v_1 दूरी तय कर लेता है। अत: C से प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का आयतन $A_1 v_1$ होगा।

इस प्रकार, परिच्छेद C से प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का आयतन $= A_1 v_1 \rho$

इसी प्रकार, परिच्छेद D से प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का द्रव्यमान $= A_2 v_2 \rho$

चूँकि द्रव असम्पीड्य है, नली के किसी भी भाग में द्रव का संचय नहीं हो सकता है। अत: प्रति सेकण्ड जितना द्रव परिच्छेद C में प्रवेश करता है, प्रति सेकण्ड उतना ही द्रव परिच्छेद D से बाहर निकलता है।

$\therefore$ $$A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho$$

या $$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

या $$A . v = \text{एक नियतांक}$$

यही अविरतता का सिद्धान्त है।

प्रश्न 11. बहते द्रव में कौन-कौन सी ऊर्जाएँ होती हैं ? उनके लिए व्यंजक लिखिए।

उत्तर—बहते हुए आदर्श द्रव में तीन प्रकार की ऊर्जाएँ होती हैं—

(i) गतिज ऊर्जा—यदि m द्रव्यमान का कोई द्रव v वेग से बह रहा हो, तो उसकी गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} m v^2$$

द्रव के एकांक द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} \cdot \frac{m v^2}{m} = \frac{1}{2} v^2$

पुन: यदि m द्रव्यमान के इस द्रव का आयतन V हो, तो

द्रव के एकांक आयतन की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} \cdot \frac{m v^2}{V}$

$$= \frac{1}{2} \rho v^2, \qquad \left(\because \rho = \frac{m}{V}\right)$$

जहाँ, ρ द्रव का घनत्व है।

(ii) स्थितिज ऊर्जा—यदि m द्रव्यमान का कोई द्रव पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर हो, तो उसकी स्थितिज ऊर्जा $= mgh$, जहाँ g गुरुत्वीय त्वरण है।

$\therefore$ द्रव के एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{mgh}{m} = gh$

पुन: द्रव के एकांक आयतन की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{m}{V} \cdot gh = \rho gh.$

(iii) दाब ऊर्जा—द्रव के प्रवाह के लिए द्रव पर दाब आरोपित किया जाता है जिसके कारण उसमें दाब ऊर्जा होती है।

यदि द्रव के क्षेत्रफल A पर P दाब आरोपित करने से द्रव x दूरी तक बहे, तो

द्रव की दाब ऊर्जा = किया गया कार्य = बल × दूरी

= दाब × क्षेत्रफल × दूरी

$= \rho . A . x = P . V$

जहाँ, $V = Ax$ = द्रव का आयतन

$\therefore$ द्रव के एकांक आयतन की दाब ऊर्जा $= \frac{PV}{V} = P$

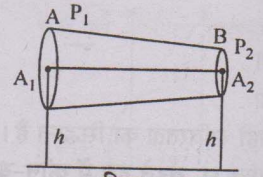
पुन: द्रव के एकांक द्रव्यमान की दाब ऊर्जा $= \frac{PV}{m} = \frac{P}{\frac{m}{V}} = \frac{P}{\rho}.$

प्रश्न 12. बरनौली प्रमेय की सहायता से आदर्श तरल के लिए निम्नलिखित सूत्र स्थापित कीजिए—

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

जबकि किसी क्षैतिज नली के दो सिरों पर ρ घनत्व वाले द्रव के प्रवाह के वेग क्रमशः v_1 और v_2 तथा दाब क्रमशः P_1 व P_2 हैं। नली में घर्षण नगण्य है।

उत्तर—बरनौली प्रमेय से,



चित्र

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh = \text{एक नियतांक}$$

या $$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1 = P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2$$

यदि नली क्षैतिज है, तो $h_1 = h_2 = h$ (मानलो)।

तब उपर्युक्त समी. (1) से,

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_2-P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2).$$

प्रश्न 13. टोरिसिली का प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

उत्तर—इस प्रमेय के अनुसार, किसी पिण्ड से किसी द्रव का बहि:स्राव वेग उस वेग के बराबर होता है, जिसे कोई वस्तु द्रव के स्वतंत्र पृष्ठ से उस छिद्र तक स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए प्राप्त कर लेता है।

मानलो चित्र के अनुसार किसी टंकी में H ऊँचाई तक द्रव भरा हुआ है। द्रव की स्वतंत्र सतह से h गहराई पर टंकी में एक छिद्र S है। तब छिद्र S में से द्रव बहने लगेगा। **टंकी में बने छिद्र में से जिस वेग से कोई द्रव बाहर निकलता है उसे उस द्रव का बहि:स्राव वेग कहते हैं।**

द्रव के स्वतंत्र पृष्ठ पर गतिज ऊर्जा 0 तथा स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होगी।

अतः द्रव के स्वतंत्र पृष्ठ पर एकांक आयतन की कुल ऊर्जा

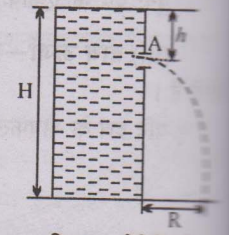
$$= P+0+\rho gH = P+\rho gH$$

जहाँ, P वायुमण्डलीय दाब तथा ρ द्रव का घनत्व है। इसी तरह छिद्र S पर एकांक आयतन की कुल ऊर्जा

$$= P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g(H-h)$$

जहाँ, v बहि:स्राव वेग है।

अतः बरनौली प्रमेय से,



चित्र—टोरिसिली

$$P+\rho gH = P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g(H-h)$$

या $$\rho gH = \frac{1}{2}\rho v^2+\rho gH-\rho gh$$

या $$\frac{1}{2}v^2 = gh$$

या $$v^2 = 2gh$$

$\therefore$ $$v = \sqrt{2gh}$$

यदि कोई वस्तु h ऊँचाई से स्वतंत्रतापूर्वक छोड़ी जाए ($u=0$), तो गति के तीसरे समीकरण से,

$$v^2 = 2gh$$

या $$v = \sqrt{2gh}$$

अतः किसी छिद्र से किसी द्रव का बहि:स्राव वेग उस वेग के बराबर होता है जिसे कोई वस्तु द्रव के स्वतंत्र पृष्ठ से उस छिद्र तक स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए प्राप्त कर लेता है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि बहते हुए द्रव की ऊर्जाओं का योग सदैव स्थिर रहता है।

अथवा

बरनौली का प्रमेय क्या है ? लिखिए तथा सिद्ध कीजिए। **(M.P. 2009, 10, 11, 12)**

अथवा

बरनौली का प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए कि

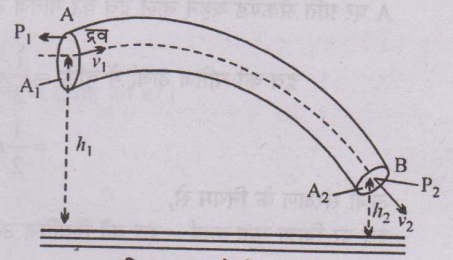
$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh = \text{एक नियतांक।}$$

अथवा

बरनौली प्रमेय क्या है ?

उत्तर—जब कोई आदर्श द्रव किसी नली में धारारेखीय प्रवाह में बहता है, तो इसके मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर इसके एकांक आयतन का एकांक द्रव्यमान की कुल ऊर्जा (दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग) नियत रहती है। इसे बरनौली का प्रमेय कहते हैं।

उक्त प्रमेय को समीकरण के रूप में निम्नानुसार लिखा जाता है—



चित्र—बरनौली का प्रमेय

एकांक आयतन के लिए, $P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh = \text{एक}$ नियतांक

तथा एकांक द्रव्यमान के लिए, $\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gh = \text{एक}$ नियतांक

जहाँ, P = दाब, ρ = घनत्व, v = द्रव प्रवाह का वेग, g = गुरुत्वीय त्वरण तथा h = पृथ्वी तल से द्रव की ऊँचाई।

गणितीय प्रमाण—मानलो कोई आदर्श द्रव एक असमान अनुप्रस्थ परिच्छेद वाली नली AB में बह रहा है। उसका प्रवाह धारारेखीय है।

A और B नली के दो अनुप्रस्थ परिच्छेद हैं जिनके क्षेत्रफल क्रमशः A_1 और A_2 हैं। परिच्छेद A पर द्रव प्रवाह का वेग v_1 व दाब P_1 तथा परिच्छेद B पर द्रव प्रवाह का वेग v_2 व दाब P_2 हैं। पृथ्वी तल से A की ऊँचाई h_1 तथा B की ऊँचाई h_2 है। मान लो द्रव का घनत्व ρ है।

परिच्छेद A पर द्रव पर लगने वाला बल = दाब × क्षेत्रफल = P_1A_1

अतः परिच्छेद A से प्रति सेकण्ड निकलने वाले द्रव पर किया गया कार्य

$$= \text{बल} \times \text{दूरी}$$

$$= P_1A_1.v_1$$

तथा परिच्छेद B से प्रति सेकण्ड निकलने वाले द्रव द्वारा किया गया कार्य

$$= P_2A_2.v_2$$

$\therefore$ द्रव पर किया गया कुल कार्य $= P_1A_1v_1 - P_2A_2v_2$ ...(1)

परन्तु अविरतता के सिद्धान्त से,

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

जहाँ, A_1v_1 या A_2v_2 प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का आयतन है।

अत: प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का द्रव्यमान = आयतन × घनत्व

या $$m = A_1v_1\rho = A_2v_2\rho$$

$$\therefore \quad A_1v_1 = \frac{m}{\rho} \text{ तथा } A_2v_2 = \frac{m}{\rho}$$

समी. (1) में मान रखने पर,

द्रव पर किया गया कुल कार्य $= P_1.\frac{m}{\rho} - P_2.\frac{m}{\rho}$

$$= (P_1 - P_2).\frac{m}{\rho}$$

A पर प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव की स्थितिज ऊर्जा mgh_1 तथा B पर mgh_2 होगी।

$\therefore$ द्रव की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $= mgh_2 - mgh_1$

$$= mg(h_2 - h_1)$$

A पर प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_1^2$ तथा B पर $\frac{1}{2}mv_2^2$ है।

$\therefore$ द्रव की गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

ऊर्जा संरक्षण के नियम से,

द्रव पर किया गया कार्य = द्रव की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि + द्रव की गतिज ऊर्जा में वृद्धि

या $$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

या $$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

या $$P_1 - P_2 = \rho gh_2 - \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

या $$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 \quad ...(2)$$

$\therefore$ $$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{एक नियतांक} \quad ...(3)$$

अत: द्रव के एकांक द्रव्यमान की कुल ऊर्जा नियत रहती है।

समी. (3) में ρ (एक नियत राशि) का भाग देने पर,

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh = \text{एक नियतांक।}$$ **यही बरनौली का प्रमेय है**

प्रश्न 2. वेन्चुरीमीटर में दो स्थानों पर नली के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल A_1 और A_2 हैं तथा वहाँ दाब के अन्तर द्रव की ऊँचाई h के बराबर है। नली में से प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव के आयतन का सूत्र स्थापित कीजिए।

अथवा

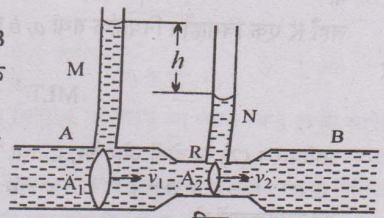
वेन्चुरीमीटर द्वारा द्रव प्रवाह की दर का सूत्र स्थापित कीजिए।

अथवा

बरनौली प्रमेय के किसी एक अनुप्रयोग को समझाइए।

उत्तर—वेन्चुरीमीटर बरनौली प्रमेय पर आधारित एक उपकरण है, जिसकी सहायता से किसी नली में बहने वाले पानी के प्रवाह की दर ज्ञात की जा सकती है।

वेन्चुरीमीटर की बनावट चित्र में प्रदर्शित की गयी है। इसमें AB एक क्षैतिज नली होती है जिसके बीच का भाग R संकीर्ण होता है। इसके साथ दो ऊर्ध्वाधर नलियाँ M व N जुड़ी रहती हैं।



चित्र

मानलो A पर नली के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A_1, पानी के प्रवाह का वेग v_1 तथा दाब P_1 है। R पर नली के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल A_2, पानी के प्रवाह का वेग v_2 तथा दाब P_2 है।

चूँकि नली क्षैतिज है अत: बरनौली प्रमेय से,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \quad ...(1)$$

किन्तु अविरतता के सिद्धान्त से,

$$A_1v_1 = A_2v_2 = Q$$

जहाँ, Q = प्रति सेकण्ड बहने वाले पानी का आयतन = पानी के प्रवाह की दर।

अत: $$v_1 = \frac{Q}{A_1} \text{ तथा } v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

समी. (1) में मान रखने पर,

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q^2}{A_2^2} - \frac{Q^2}{A_1^2}\right)$$

या $$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{A_1^2.A_2^2}(A_1^2 - A_2^2) \quad ...(2)$$

यदि नलियों M और N में पानी के तल का अन्तर h हो, तो

$$P_1 - P_2 = h\rho g$$

समी. (2) में मान रखने पर,

$$h\rho g = \frac{1}{2}.\frac{\rho Q^2}{A_1^2.A_2^2}(A_1^2 - A_2^2)$$

या $$Q^2 = A_1^2.A_2^2.\frac{2hg}{A_1^2 - A_2^2}$$

या $$Q = A_1A_2\sqrt{\frac{2hg}{A_1^2 - A_2^2}}$$ **यही अभीष्ठ सूत्र है।**

प्रश्न 3. स्टोक का नियम लिखिये तथा सिद्ध कीजिये। इस नियम की शर्तें लिखिये।

अथवा

सिद्ध कीजिये कि किसी तरल में गिरते गोलीय पिंड पर लगने वाला श्यान बल $F = 6\pi\eta rv$.

उत्तर—जब कोई गोलीय वस्तु किसी अनन्त विस्तार वाले समांगी तरल में गिरती है, तो वस्तु की गति के विपरीत लगने वाला श्यान बल $6\pi\eta rv$ होता है। जहाँ η तरल का श्यानता गुणांक, r गोलीय वस्तु की त्रिज्या तथा v वस्तु का वेग है।

उपपत्ति—प्रायोगिक परिणामों के आधार पर किसी गोलीय गतिशील वस्तु पर लगने वाला श्यान बल F_1 माध्यम की श्यानता गुणांक η, वस्तु की त्रिज्या r तथा वस्तु के वेग v पर निर्भर करता है। अत: श्यान बल

$$F \propto \eta^a r^b v^c$$

या $$F = K\eta^a r^b v^c$$

जहाँ K एक विमाहीन नियतांक तथा a, b एवं c शुद्ध संख्याएँ हैं। अत: समीकरण (1) को विमाओं के रूप में लिखने पर

$$MLT^{-2} = [ML^{-1}T^{-1}]^a \times [L]^b [LT^{-1}]^c$$
$$= M^a L^{-a+B+c} T^{-a-c}$$

समीकरण (2) के दोनों ओर M, L तथा T के विमाओं को समान करने पर

$a = 1, -a + b + c = 1, -c - a = -2$

इन समीकरणों से

$$a + c = 2$$

या $$1 + c = 2$$

या $$c = 1$$

तथा $$-a + b + c = 1$$

या $$-1 + b + 1 = 1$$

या $$b = 1$$

अत: समीकरण (2) में a, b तथा c के मानों को रखने पर,

$$F = K\eta rv$$

प्रायोगिक परिणाम यह प्रदर्शित करते हैं कि $K = 6\pi$ होता है अत: समीकरण (3) से

$$F = 6\pi\eta rv$$

यही स्टोक का नियम है।

शर्तें—स्टोक नियम लागू होने के लिये यह आवश्यक है कि—

(i) गोलीय वस्तु का आकार छोटा हो।

(ii) गोलीय वस्तु चिकना व दृढ़ हो।

(iii) वस्तु का वेग द्रव के क्रांतिक वेग से कम हो।

(iv) तरल का विस्तार अनंत हो।

(v) तरल समांगी तथा श्यान हो।

आंकिक प्रश्न

प्रश्न 1. जल की दो समान्तर पर्तों में सापेक्ष वेग 8 सेमी/सेकण्ड तथा पर्तों के बीच लम्बवत् दूरी 0·1 सेमी है। वेग प्रवणता ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है, $dv = 8$ सेमी/सेकण्ड,

$dx = 0{\cdot}1$ सेमी

$$\therefore \text{वेग प्रवणता} = \frac{dv}{dx} = \frac{8{\cdot}0}{0{\cdot}1}$$

$= 80$ प्रति सेकण्ड **उत्तर**

प्रश्न 2. 10^{-2} मीटर^2 क्षेत्रफल की धातु की प्लेट 2 मिमी मोटी द्रव की सतह पर रखी है। यदि इसे 6·7 सेमी/सेकण्ड के वेग से खिसकाना हो, तो कितना बल लगाना होगा ? द्रव का श्यानता गुणांक = 1·5 किग्रा/मीटर × सेकण्ड।

हल : दिया है— $A = 10^{-2}$ मीटर^2, $dx = 2$ मिमी $= 2 \times 10^{-3}$ मीटर, $v = 6{\cdot}7$ सेमी/सेकण्ड $= 6{\cdot}7 \times 10^{-2}$ मी/से, $\eta = 1{\cdot}5$ किग्रा/मीटर × सेकण्ड

$$\frac{dv}{dx} = \frac{6{\cdot}7 \times 10^{-2} - 0}{2 \times 10^{-3}},$$

(चूँकि द्रव की निचली सतह स्थिर है)

$= 33{\cdot}5$ मात्रक

अब सूत्र— $F = -\eta A \frac{dv}{dx}$ में मान रखने पर,

$$F = -1{\cdot}5 \times 10^{-2} \times 33{\cdot}5$$
$$= -50{\cdot}25 \times 10^{-2} = -0{\cdot}50 \text{ न्यूटन।}$$